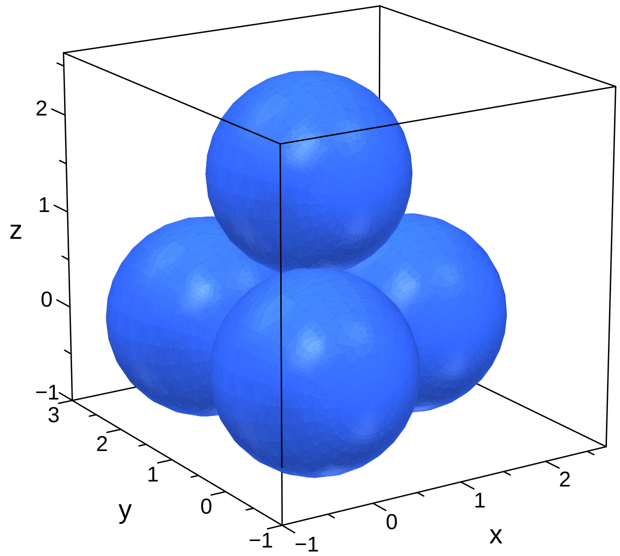
Problème de sphères

Le problème

Voici l'énoncé :
soit $S(1), S(2), S(3), S(4)$ des sphères de rayon 1, chacune étant tangente au trois autres. Peut-on placer des sphères $S'(1), S'(2), S'(3), S'(4)$ toutes de meme rayon r, chacune etant tangente aux trois autres et aussi tangente a trois des sphères $S(1), S(2), S(3), S(4)$ (les interieurs de ces huit sphères sont supposés disjoints). Quelles sont les valeurs de r "permises" ?

Résolution

Mettons les sphères sur un tétraèdre régulier et notons S_i (respectivement S'_i) les centres des sphères $S(i)$ (respectivement $S'(i)$. Sans limiter la généralité, on peut supposer que $S_1 = (0, 0, 0)$, $S_2 = (0, 2, 0)$, $S_3 = (\sqrt{3}, 1, 0)$ et $S_4 = (\frac{\sqrt{3}}{3}, 1, \frac{2\sqrt{6}}{3})$. Graphiquement, on trouve :



Sans limiter la généralité, , on va supposer que $S'(1)$ soit tangent à $S(1), S(2)$ et $S(3)$, $S'(2)$, tangent à S'_2 soit tangent à $S(2), S(3)$ et $S(4)$, et ainsi de suite de manière cyclique. S'_1 doit donc se trouver sur la droite perpendiculaire au plan S_1, S_2, S_3 et passant par le centre de gravité du triangle S_1, S_2, S_3. Donc $S'_1 = (\frac{\sqrt{3}}{3}, 1, k)$ (qui est l'équation paramétrique d'une droite, que nous appellerons encore S'_1. De même $S'_2 = (\frac{4\sqrt{3}}{9} + \sqrt{6}l, \frac{4}{3} + 3\sqrt{2}l, \frac{2\sqrt{6}}{9} + \sqrt{3}l)$. Aussi $S'_3 = (\frac{4\sqrt{3}}{9} + \sqrt{6}m, \frac{2}{3} - 3\sqrt{2}m, \frac{2\sqrt{6}}{9} + \sqrt{3}m)$, et enfin, $S'_4 = (\frac{\sqrt{3}}{9} + 2\sqrt{6}n, 1, \frac{2\sqrt{6}}{9} - \sqrt{3}n)$. Toutes ces droites se rejoignent au même point $P = (\frac{\sqrt{3}}{3}, 1, \frac{\sqrt{6}}{6})$. Ce qui permet de paramétrer les points d'une autre manière (avec un vecteur unitaire, ce qui est plus pratique). Ainsi :

$$S'_1 = (\tfrac{\sqrt{3}}{3}, 1, \tfrac{\sqrt{6}}{6} + k) \qquad S'_2 = (\tfrac{\sqrt{3}}{3} + \tfrac{\sqrt{2}}{3}l, 1 + \tfrac{\sqrt{6}}{3}, \tfrac{\sqrt{6}}{6} + \tfrac{1}{3}l)$$
$$S'_3 = (\tfrac{\sqrt{3}}{3} + \tfrac{\sqrt{2}}{3}m, 1 - \tfrac{\sqrt{6}}{3}m, \tfrac{\sqrt{6}}{6} + \tfrac{1}{3}m) \qquad S'_4 = (\tfrac{\sqrt{3}}{3} + \tfrac{2\sqrt{2}}{3}n, 1, \tfrac{\sqrt{6}}{6} - \tfrac{1}{3}n)$$

La valeur absolue de chaque paramètre est la même. On voit que $k = -l$, par exemple. Ce qu'il faut est que

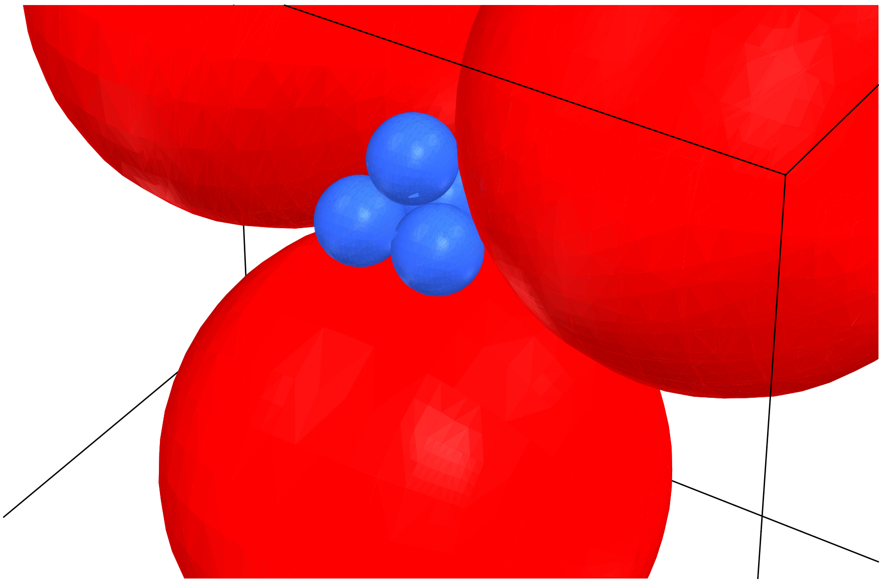
$$r = \frac{1}{2} \cdot \|\overrightarrow{S'_1 S'_2}\| = \|\overrightarrow{S'_1 S_1}\| - 1,$$

Traduit en terme d'équation (en tenant compte des signes et en triturant un peu l'équation) que

$$\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}l + 1\right)^2 = \frac{4}{3} + \left(l + \frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2$$

Ce qui veut dire que $l = -\frac{(3\sqrt{2}+4)\sqrt{3}}{2}$ ou $l = -\frac{(3\sqrt{2}-4)\sqrt{3}}{2}$

Et on trouve finalement comme rayon $r = \sqrt{\frac{3}{3}} \cdot |l| = 3 \pm 2\sqrt{2}$ qui valent environ 5.8284 et 0.17157. Et (sans $S'(4)$ qui cacherait), on trouve cette situation (dans le cas où $r = 3 + 2\sqrt{2}$) :



Prolongement

Une idée lumineuse de Jacques utilise la chose suivante : au lieu de travailler dans $\mathbb{R}^3$, on travaille dans $\mathbb{R}^4$ et les sommets du tétraèdre régulier sont les points S_i tels que $\overrightarrow{OS_i} = \overrightarrow{e_i}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ vu dans l'hyperplan $x + y + z + t = 1$. Puisque, ici, les distances $\delta(S_i, S_j) = \sqrt{2}$, les sphères sont de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$, donc, il faudra tout multiplier à la fin par $\sqrt{2}$. Si, pour $i = 1, \ldots, 4$, on note S'_i les centres des sphères cherchées, on a que S'_i se trouve sur la droite passant par S_i et le barycentre de la face opposée. Et on trouve facilement (et les calculs sont plus simples) le rayon des sphères cherchées.

A partir de maintenant, plaçons-nous dans $\mathbb{R}^{n+1}$ et considérons les $(n + 1)$ hypersphères centrées en S_i, et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Par ce qui vient d'être dit, on a par exemple $\overrightarrow{OS'_{n+1}} = \frac{\lambda}{n}(\overrightarrow{e_1} + \cdots + \overrightarrow{e_n}) + (1 - \lambda)\overrightarrow{e_{n+1}}$ et $\overrightarrow{OS'_1} = \frac{\lambda}{n}(\overrightarrow{e_2} + \cdots + \overrightarrow{e_{n+1}}) + (1 - \lambda)\overrightarrow{e_1}$, avec $\lambda > 0$ qui est le même pour tous les S'_i. Notons r le rayon des sphères cherchées (tout en se souvenant que c'est $x := \sqrt{2}r$ que l'on cherche). On a les équations :

$$2r = \|\overrightarrow{S'_1 S'_{n+1}}\| \text{ et } r + \frac{1}{\sqrt{2}} = \|\overrightarrow{S'_{n+1} S_1}\|,$$

où, rappelons-le $S_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $S'_{n+1} = (\frac{\lambda}{n}, \dots, \frac{\lambda}{n}, (1-\lambda))$ et $S'_1 = ((1-\lambda), \frac{\lambda}{n}, \dots, \frac{\lambda}{n})$.
La première équation nous donne : $(2 \cdot r)^2 = 2 \cdot \left(\frac{n+1}{n} \cdot \lambda - 1\right)^2$, ce qui se traduit par

$$x^2 = \left(\frac{n+1}{n} \cdot \lambda - 1\right)^2$$

Pour l'autre équation, on a

$$\begin{aligned} (r + \tfrac{1}{\sqrt{2}})^2 &= (\tfrac{\lambda}{n} - 1)^2 + (n-1)\left(\tfrac{\lambda}{n}\right)^2 + (1-\lambda)^2 \\ &= \tfrac{(n+1)}{n} \cdot \lambda^2 - 2 \cdot \tfrac{n+1}{n} \cdot \lambda + 2 \end{aligned}$$

Ce qui veut dire que (en multipliant par 2 de chaque côté) que
$(x+1)^2 = 2 \cdot \frac{(n+1)}{n} \cdot \lambda^2 - 4 \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \lambda + 4$, or, $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 = \left(\frac{n+1}{n} \cdot \lambda - 1\right)^2 + 2x + 1$. Ce qui veut dire que

$$2x = \frac{(n^2-1)}{n^2} \cdot \lambda^2 - 2 \cdot \frac{n+1}{n} \cdot l + 2 = \begin{cases} 2 \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \lambda - 2 \\ 2 - 2 \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \lambda \end{cases}$$

La seconde équation nous donne $\lambda = 0$, ce qui est un cas dégénéré. La première nous donne :

$$\frac{n^2-1}{n^2} \cdot \lambda^2 - 4 \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \lambda + 4 = 0$$

Puisque $\lambda = \frac{n}{n+1}(x+1)$, en substituant, on trouve :

$$x^2 - 2 \cdot \frac{(n+3)}{(n-1)} \cdot x + 1 = 0$$

Ce qui veut dire que

$$x = \frac{\pm 2\sqrt{2(n+1)}}{n-1} + \frac{4}{n-1} + 1.$$

Ces nombres forment deux suite de nombres inverses l'uns de l'autres, décroissante (pour les +) et croissantes (pour les −) qui tendent vers 1 lorsque n tend vers l'infini. Et on voit que ces nombres ne sont des entiers algébriques que lorsque $n = 2, 3, 5$ et 9.